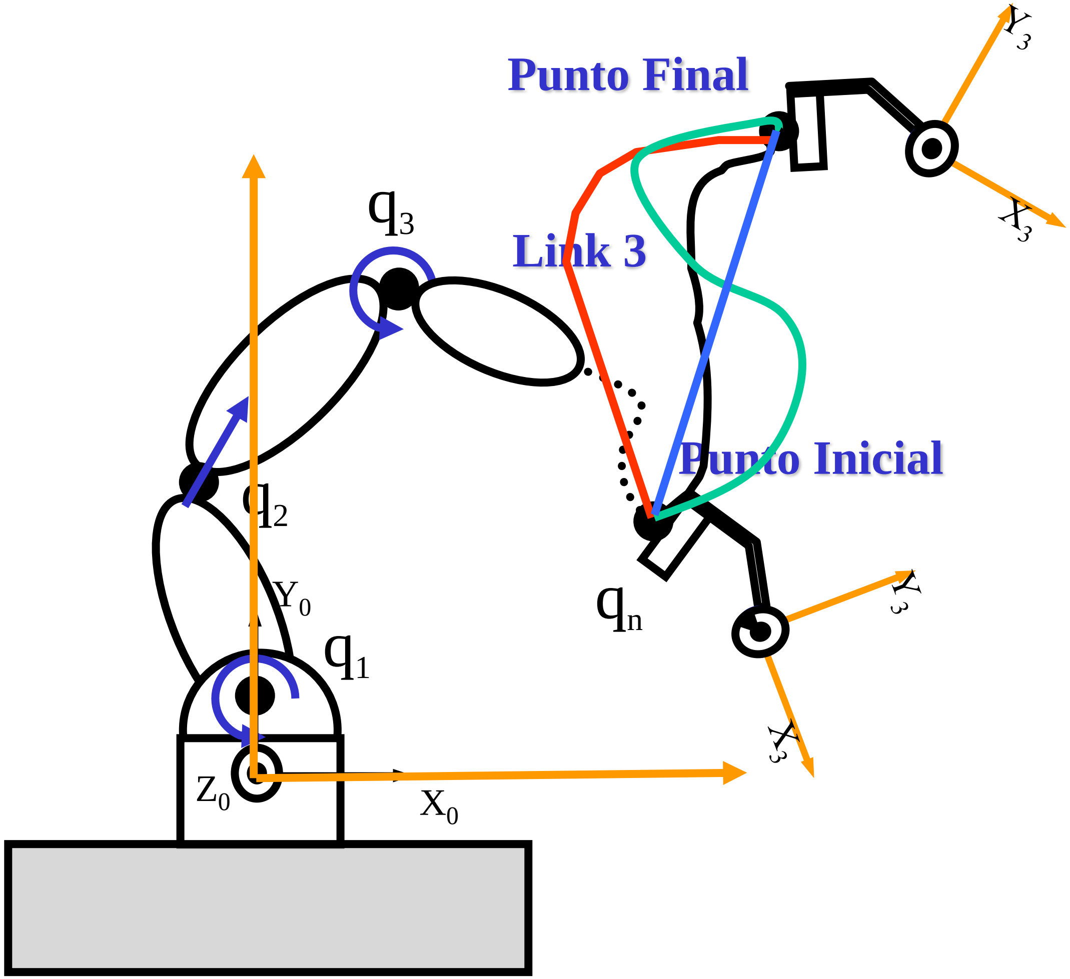
Fundamentos de Robótica: Planificación de trayectorias

Juan Carlos Grieco, Universidad Simón Bolívar
Gerardo Fernández L, Universidad Simón Bolívar
Cecilia Murrugarra Q., Universidad Simón Bolívar

Planificación de trayectorias…



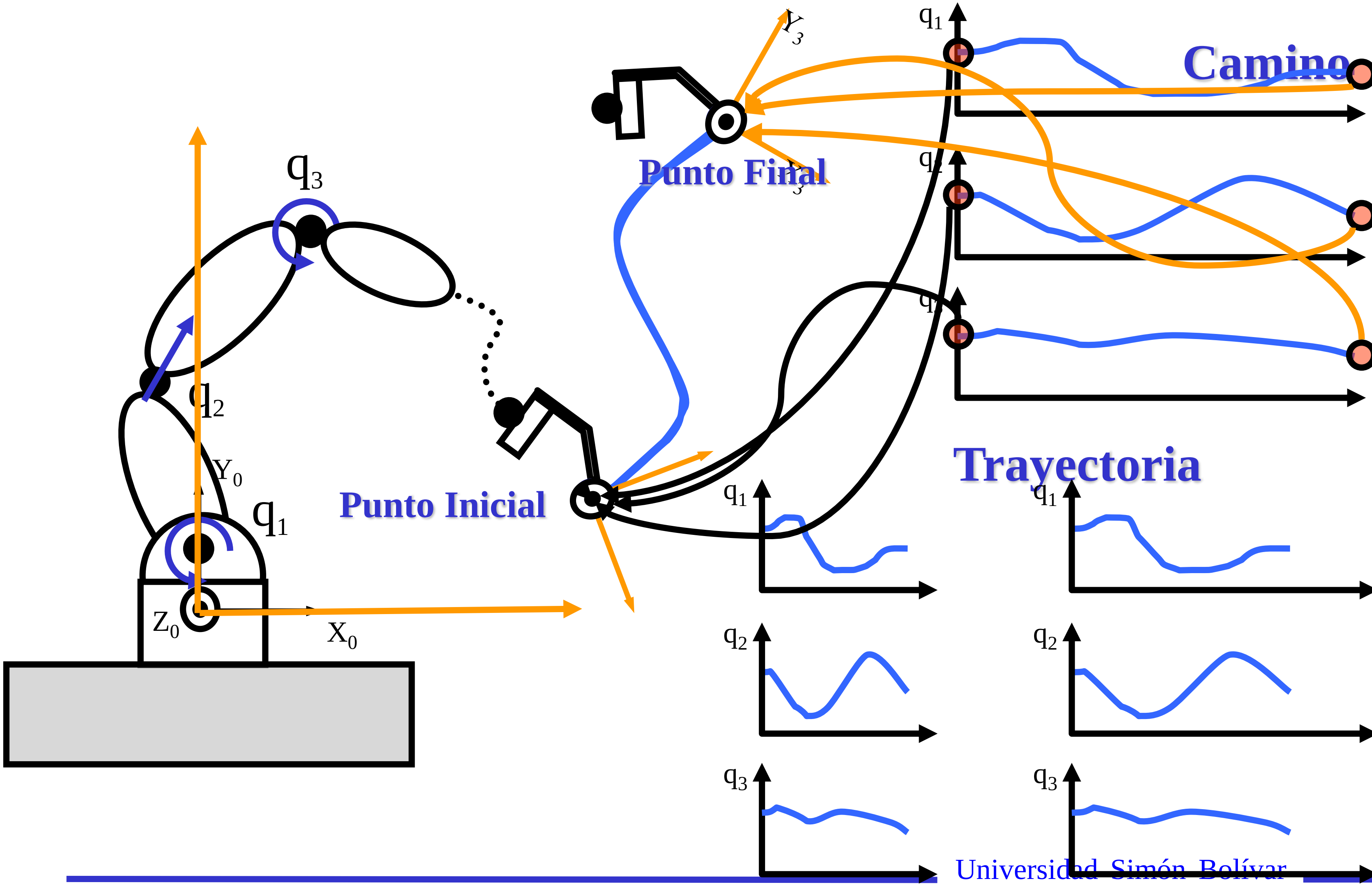
Camino

"lugar geométrico de los puntos que debe seguir el robot"

Trayectoria

"Es un camino con una ley de tiempo establecida…"

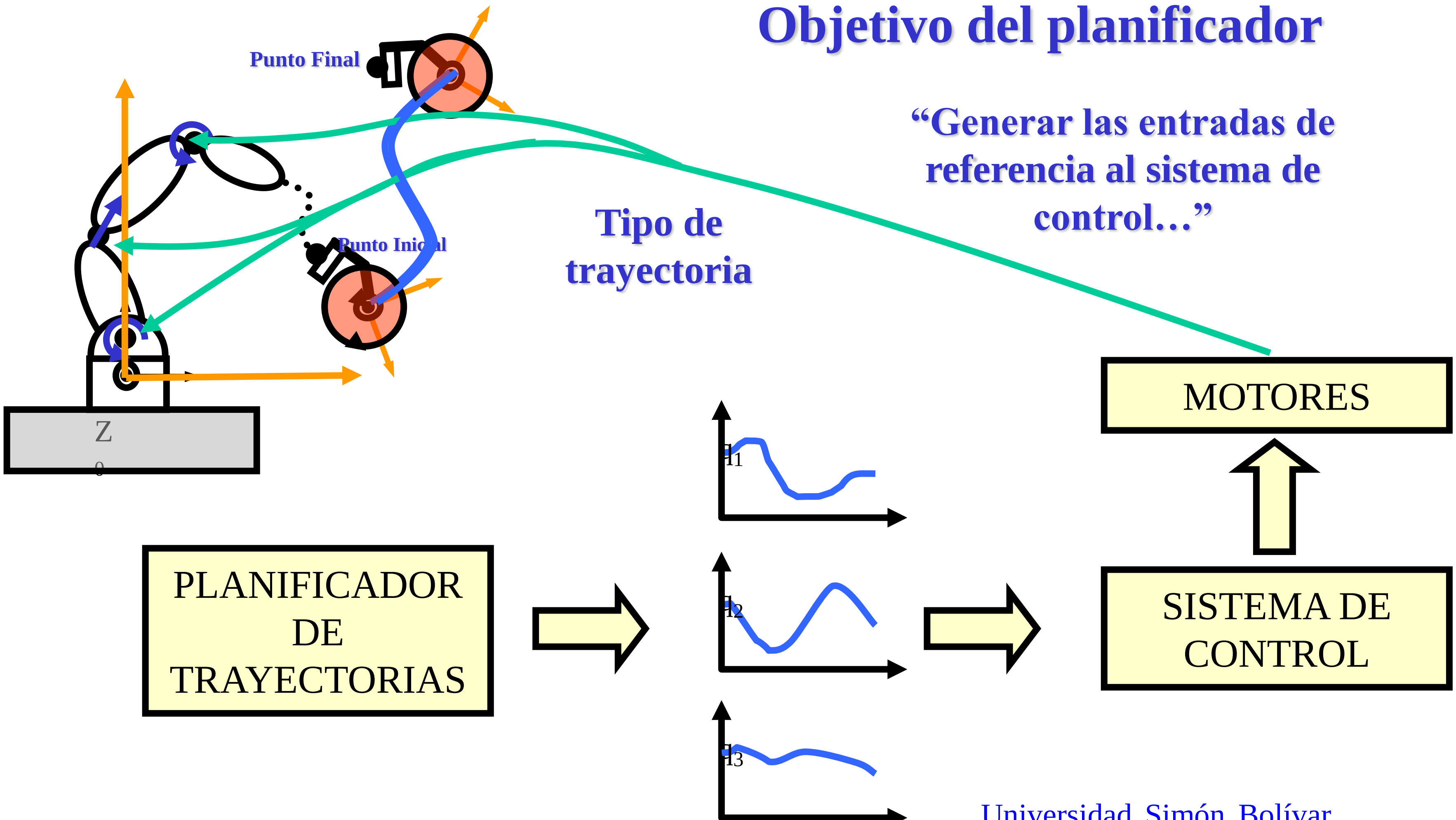
Planificación de trayectorias…



Planificación de trayectorias…

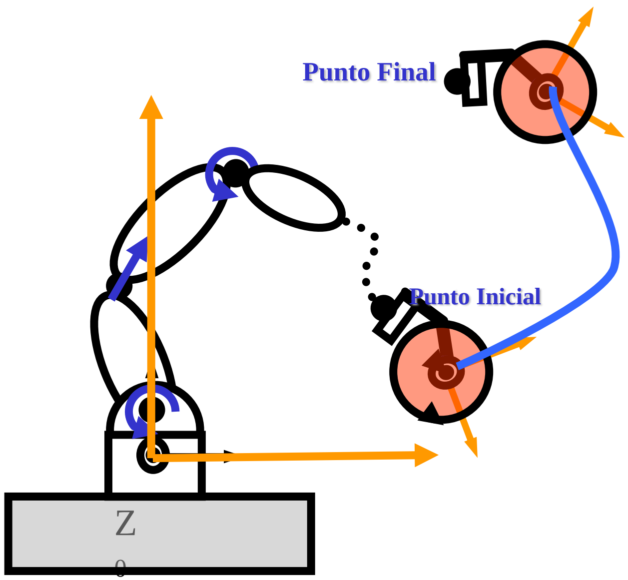
Objetivo del planificador

"Generar las entradas de referencia al sistema de control…"



Planificación de trayectorias…

Algoritmo del planificador de trayectorias

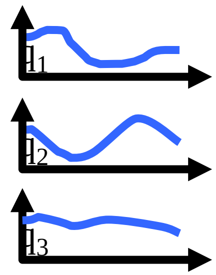


Descripción de la trayectoria

Restricciones a la trayectoria

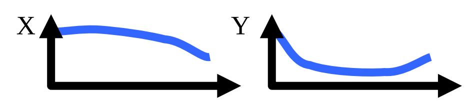
Restricciones dinámicas

PLANIFICADOR DE TRAYECTORIAS



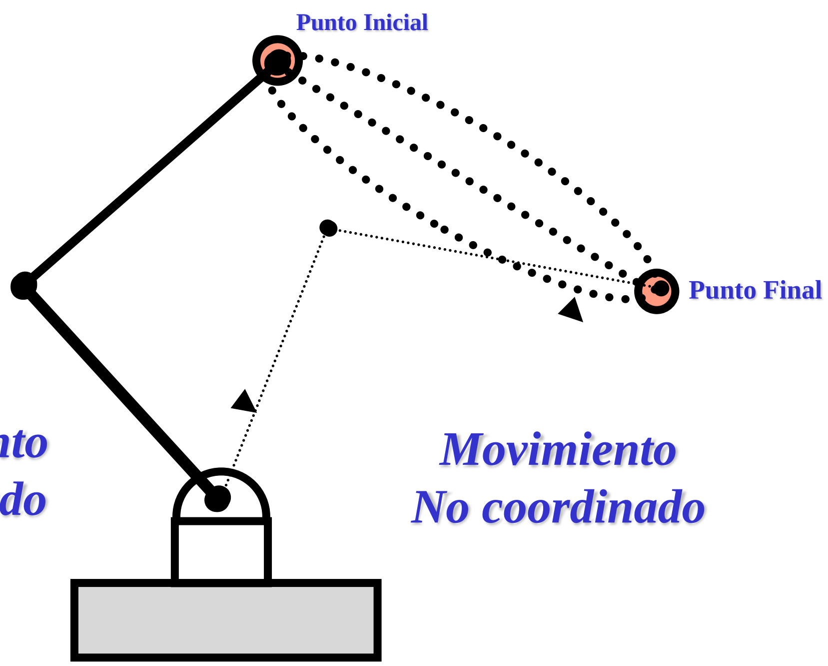
Trayectorias en el espacio de las articulaciones

Trayectorias en el espacio cartesiano



Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…



Movimiento Coordinado

Movimiento No coordinado

- Trayectorias simples…
- Posición y velocidad continua en el tiempo
- Trayectorias “suaves”…

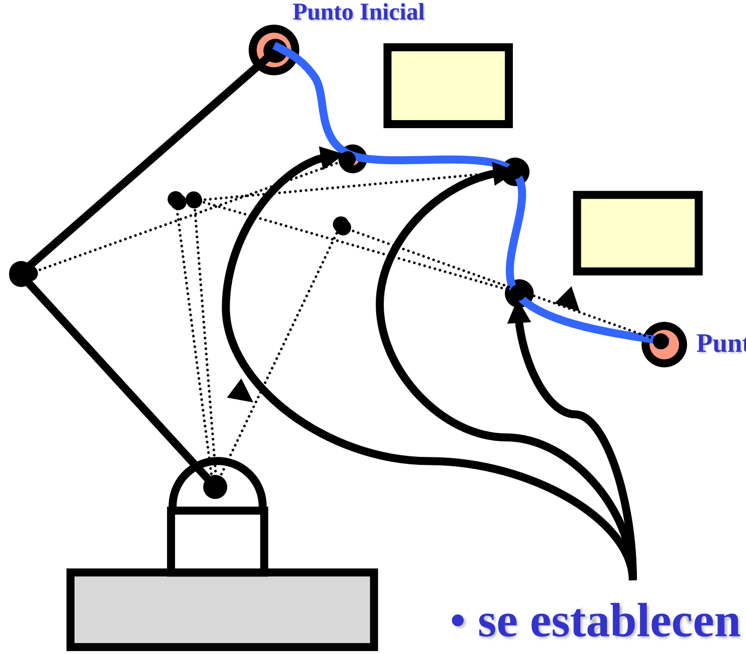
Pero… Cómo movemos el robot?

Movimiento Punto a Punto

- Más simple…
- Infinidad de caminos

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…



• se establecen restricciones de velocidad

Movimiento Punto a Punto con puntos "via"…

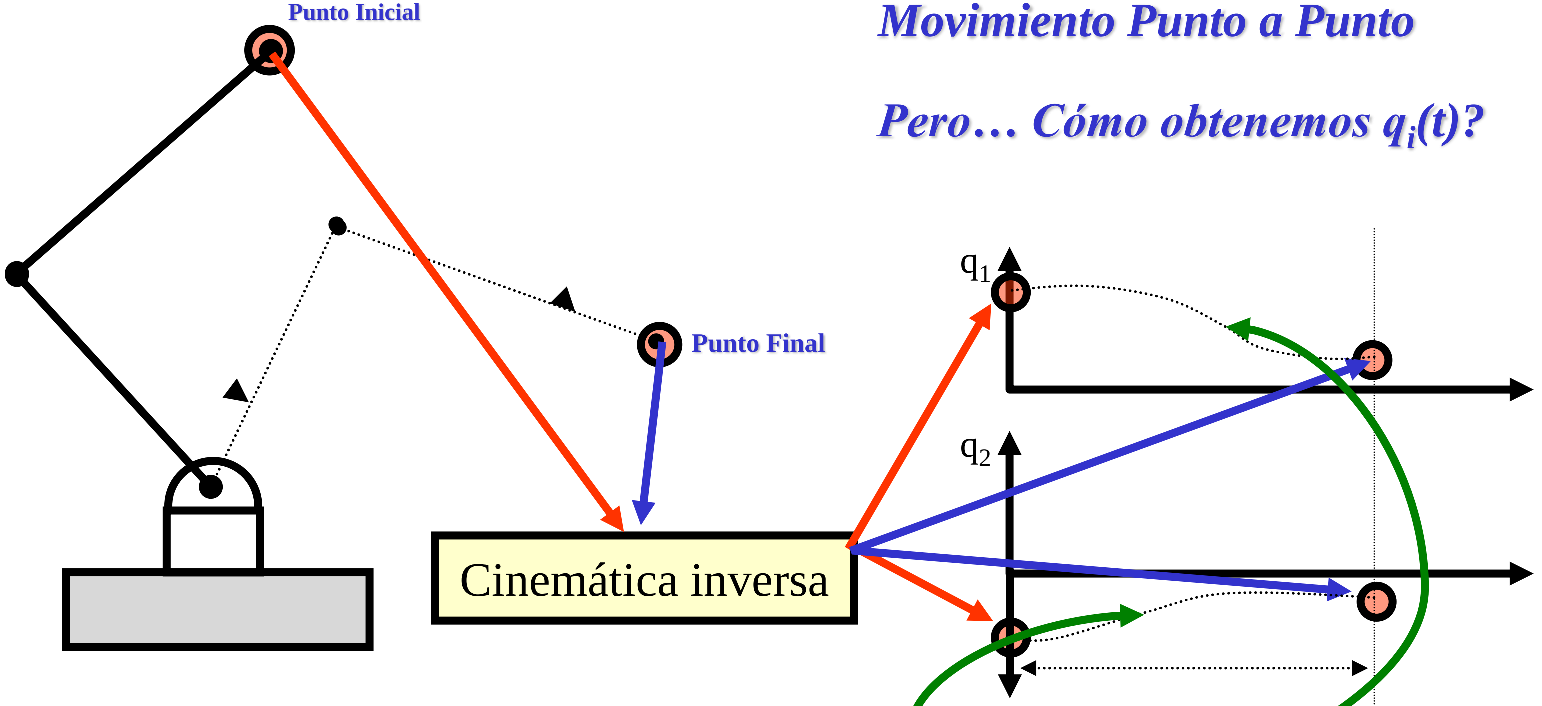
• **permite "evadir obstáculos"…**
• **"casi" se establece un camino**

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

Movimiento Punto a Punto

Pero… Cómo obtenemos $q_i(t)$?



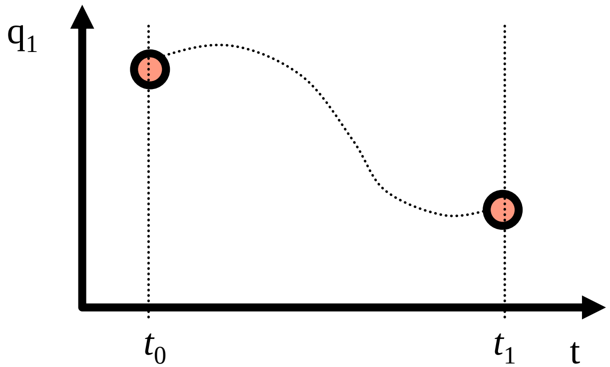
Tiempo de trayectoria…

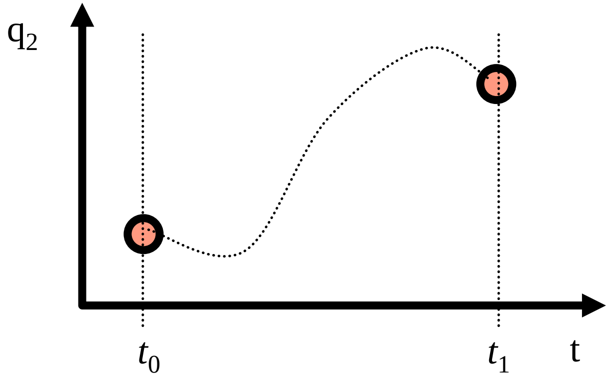
DEBEMOS GENERAR POLINOMIOS $q_i(t)$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS POLINÓMICAS…





$$q_1(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + ... + a_n \cdot t^n$$

Pero… Cómo obtenemos $q_i(t)$?

TRAYECTORIAS CÚBICAS…

$$q_1(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$$

$$\dot{q}_1(t) = a_1 + 2a_2 \cdot t + 3a_3 \cdot t^2$$

$$\ddot{q}_1(t) = 2a_2 + 6a_3 \cdot t$$

$$q_2(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3$$

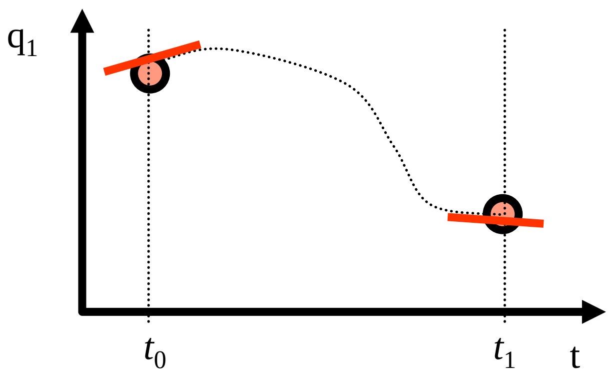
$$\dot{q}_2(t) = b_1 + 2b_2 \cdot t + 3b_3 \cdot t^2$$

$$\ddot{q}_2(t) = 2b_2 + 6b_3 \cdot t$$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS POLINÓMICAS…



TRAYECTORIAS CÚBICAS…

$$q_1(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$$

$$\dot{q}_1(t) = a_1 + 2a_2 \cdot t + 3a_3 \cdot t^2$$

$$\ddot{q}_1(t) = 2a_2 + 6a_3 \cdot t$$

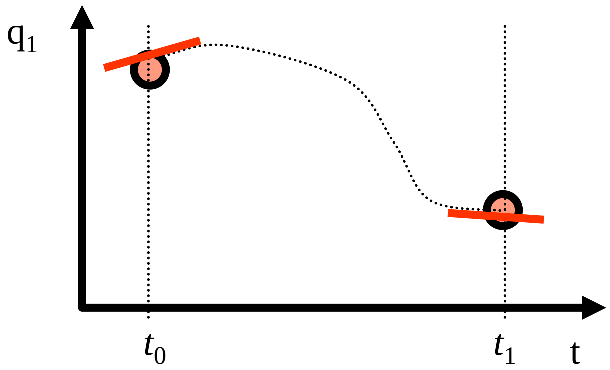
Si conocemos las posiciones y velocidades iniciales y finales…

$$\begin{array}{c} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_1 \\ \dot{q}_1 \end{array} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^{\ 2} & t_0^{\ 3} \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^{\ 2} \\ 1 & t_1 & t_1^{\ 2} & t_1^{\ 3} \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^{\ 2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} t_0^{\ 3} \\ \\ \dot{}_1^{\ 3} \\ \\ \end{array}$$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS POLINÓMICAS…



TRAYECTORIAS CÚBICAS…

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^{\,2} & t_0^{\,3} \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^{\,2} \\ 1 & t_1 & t_1^{\,2} & t_1^{\,3} \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^{\,2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Si consideramos t_o=0…

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^{\,2} & t_1^{\,3} \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^{\,2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a_0 = q_0$$

$$a_1 = \dot{q}_0$$

$$a_2 = \frac{3(q_1 - q_0) - (2\dot{q}_0 + \dot{q}_1) \cdot t_1}{t_1^{\,2}}$$

$$a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (\dot{q}_0 + \dot{q}_1) \cdot t_1}{t_1^{\,3}}$$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

Ejemplo…

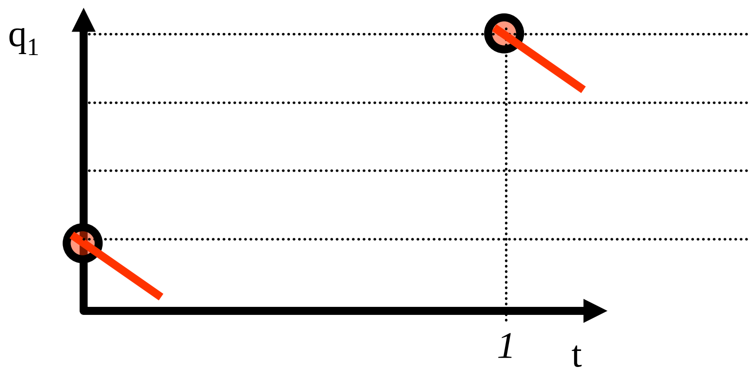
$$q_1(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$$

$$q_1(0) = 10$$

$$\dot{q}_1(0) = -50$$

$$q_1(1) = 40$$

$$\dot{q}_1(1) = -50$$



t_o=0…

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = q_0 = 10$$

$$a_1 = \dot{q}_0 = -50$$

$$a_2 = \frac{3(q_1 - q_0) - (2\dot{q}_0 + \dot{q}_1) \cdot t_1}{t_1^{\,2}} = 3(30) - (-150) = 240$$

$$a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (\dot{q}_0 + \dot{q}_1) \cdot t_1}{t_1^{\,3}} = 2(-30) + (-100) = -160$$

$$\boxed{q_1(t) = 10 - 50 \cdot t + 240 \cdot t^2 - 160 \cdot t^3}$$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

Ejemplo…

$$q_1(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$$

$$q_1(0) = 10$$

$$\dot{q}_1(0) = -50$$

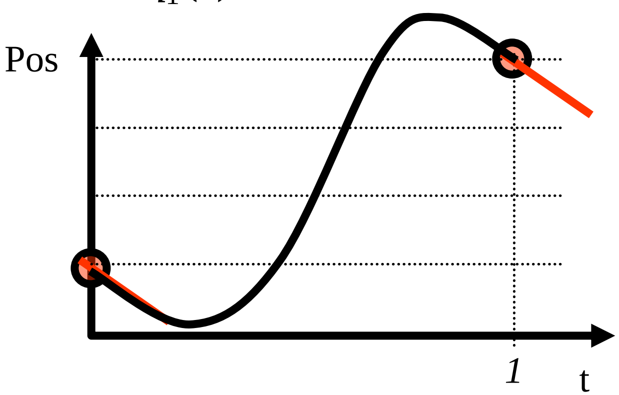
$$q_1(1) = 40$$

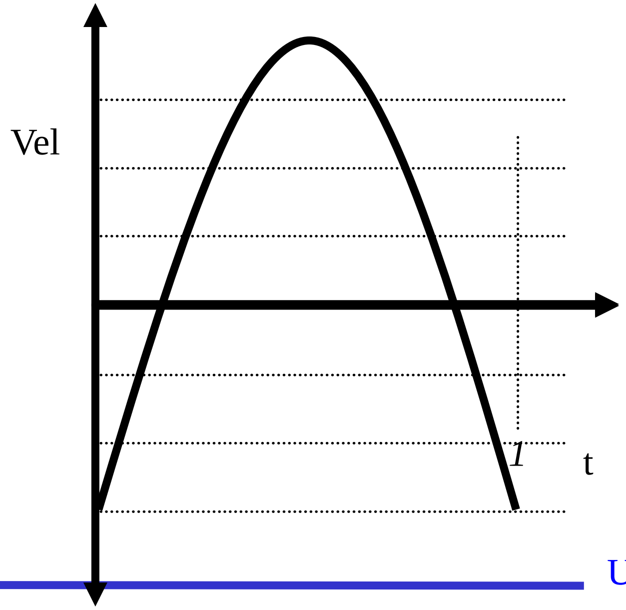
$$\dot{q}_1(1) = -50$$

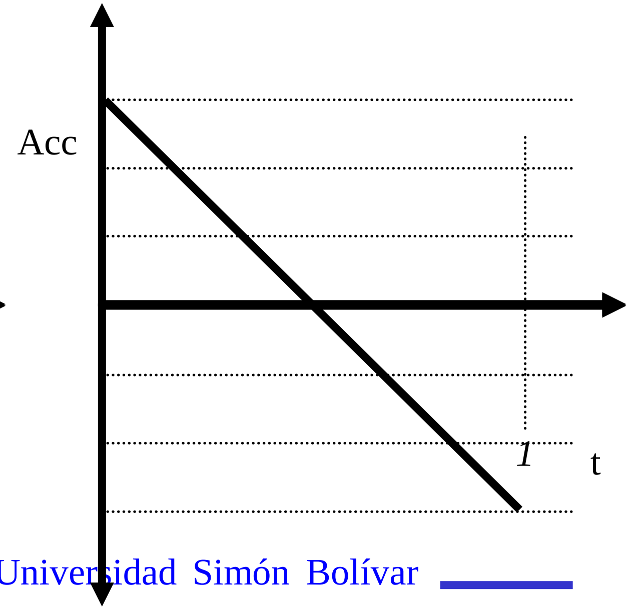
$$q_1(t) = 10 - 50 \cdot t + 240 \cdot t^2 - 160 \cdot t^3$$

$$\dot{q}_1(t) = -50 + 480 \cdot t - 480 \cdot t^2$$

$$\ddot{q}_1(t) = 480 - 960 \cdot t$$



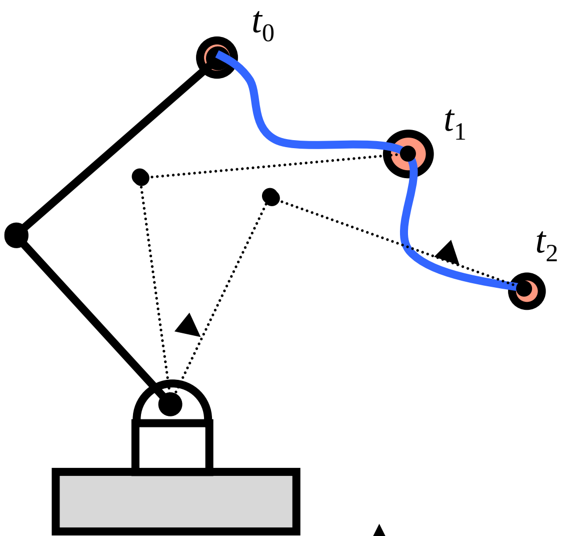


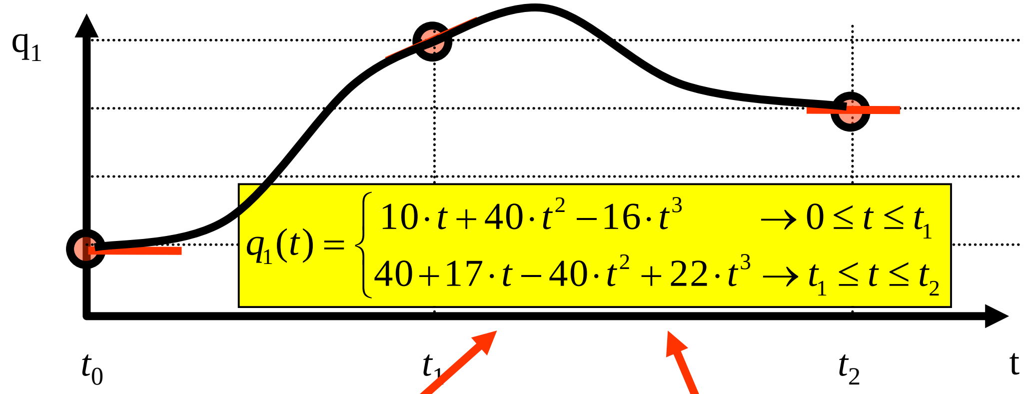


Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

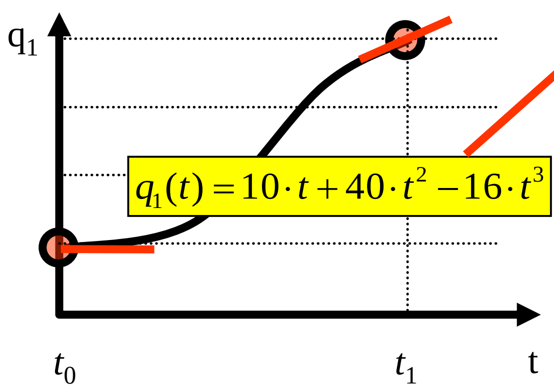
Cuando hay puntos "via"



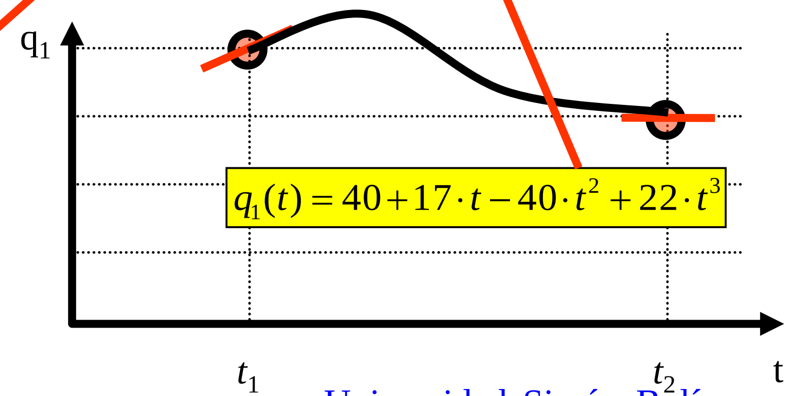


$$q_1(t) = \begin{cases} 10\cdot t + 40\cdot t^2 - 16\cdot t^3 & \rightarrow 0 \le t \le t_1 \\ 40 + 17\cdot t - 40\cdot t^2 + 22\cdot t^3 & \rightarrow t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

Determinamos dos polinomios…



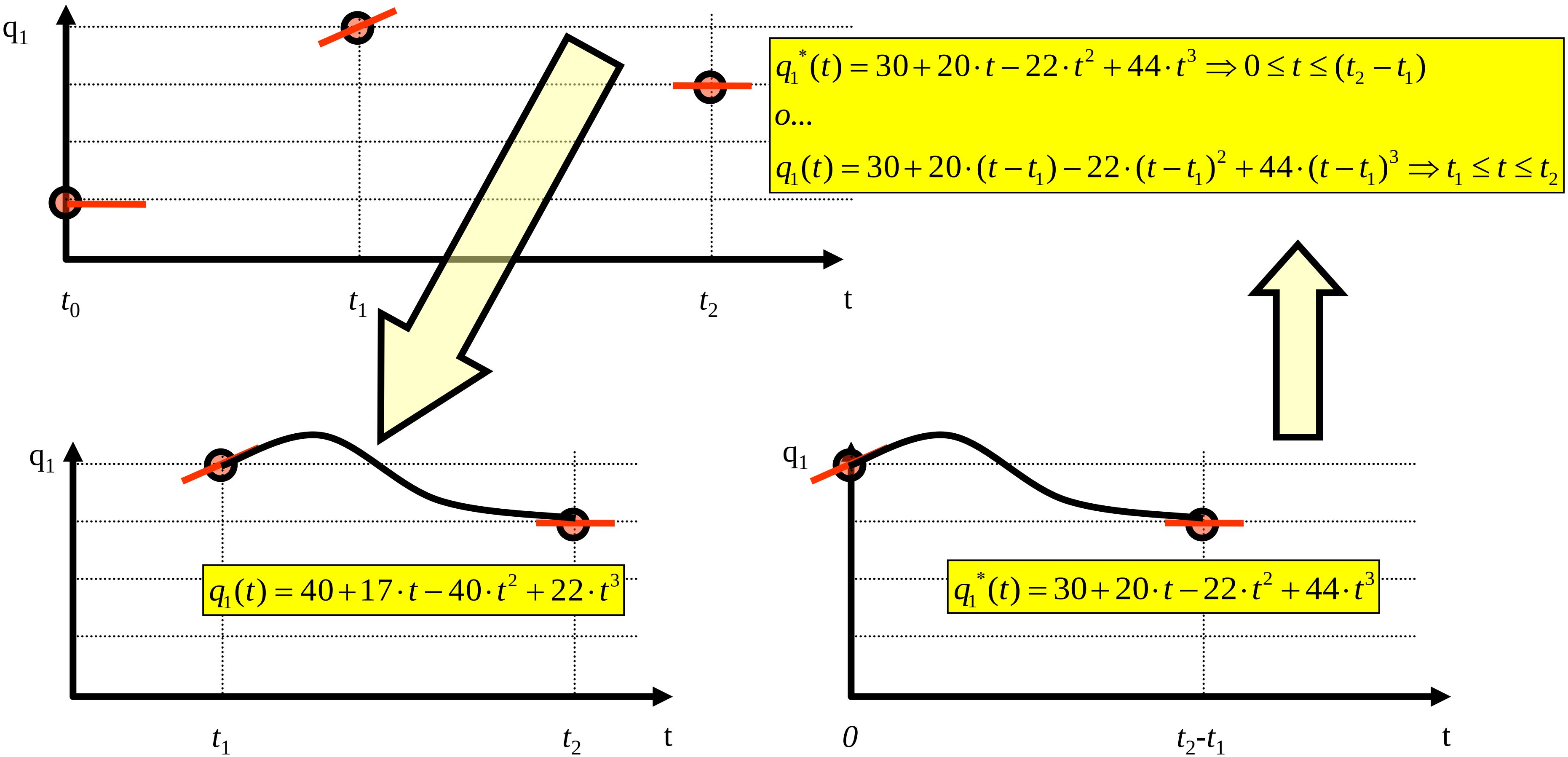
$$q_1(t) = 10\cdot t + 40\cdot t^2 - 16\cdot t^3$$



$$q_1(t) = 40 + 17\cdot t - 40\cdot t^2 + 22\cdot t^3$$

Planificación de trayectorias…

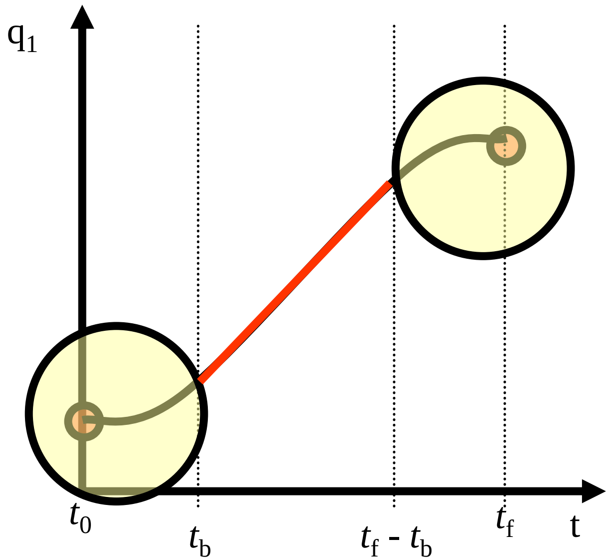
Trayectorias en el Espacio de articulación…

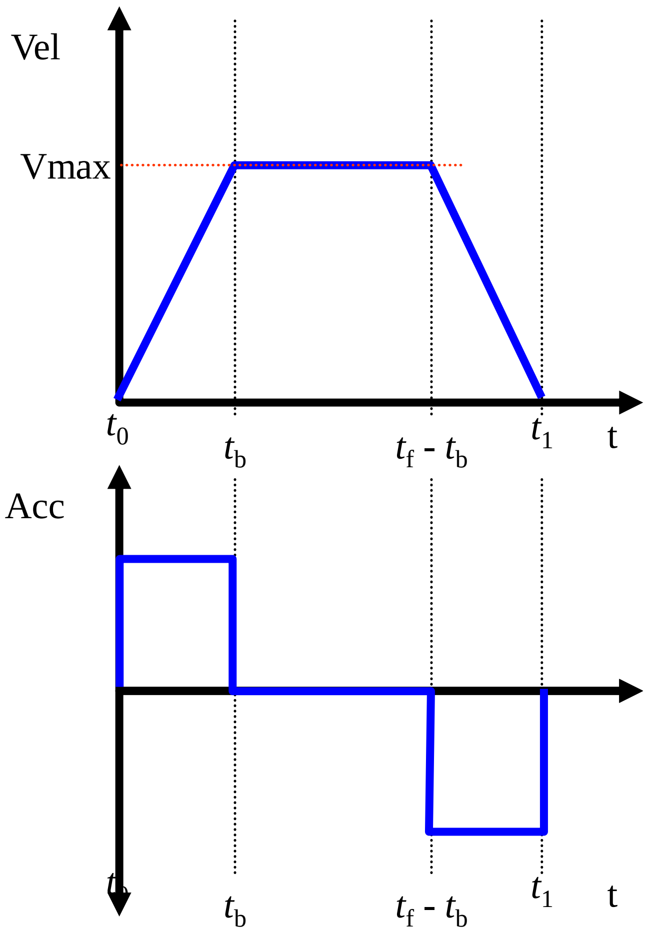


Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS LSPB…
(linear segments with parabolic blends)

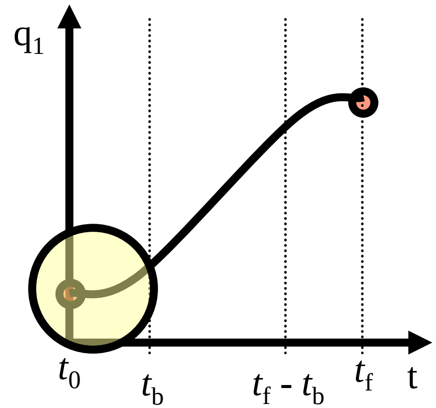


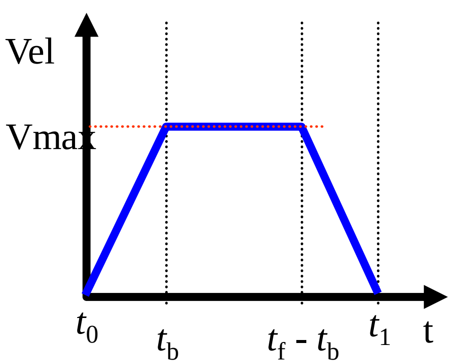


Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS LSPB…
(linear segments with parabolic blends)





Si consideramos…
vel ini =0
vel fin =0
Pos ini = q_i
Pos fin = q_f

$$0 \le t \le t_b$$

$$\boxed{q_1(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2}$$

$$\dot{q}_1(t) = a_1 + 2a_2 \cdot t$$

$$\ddot{q}_1(t) = 2a_2$$

$$0 \le t \le t_b$$

$$q_1(0) = \boxed{a_0 = q_i}$$

$$\dot{q}_1(0) = \boxed{a_1 = 0}$$

$$t = t_b$$

$$\dot{q}_1(t_b) = 2a_2 \cdot t_b = V_{\max}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{V_{\max}}{2 \cdot t_b}}$$

$$0 \le t \le t_b$$

$$q_1(t) = q_i + \frac{V_{\max}}{2 \cdot t_b} \cdot t^2$$

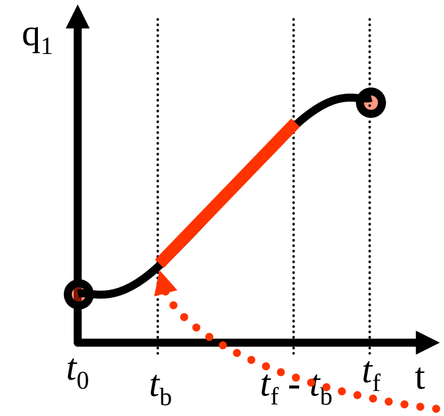
$$\dot{q}_1(t) = \frac{V_{\max}}{t_b} \cdot t$$

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{V_{\max}}{t_b}$$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS LSPB…
(linear segments with parabolic blends)



$$t_b \le t \le t_f - t_b$$

$$q_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t$$

$$\dot{q}_1(t) = \boxed{\alpha_1 = V_{\max}}$$

$$\ddot{q}_1(t) = 0$$

Por simetría…

$$t = \frac{t_f}{2}$$

$$q_1\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{q_i + q_f}{2}$$

$$\frac{q_i + q_f}{2} = \alpha_0 + V_{\max} \cdot \frac{t_f}{2}$$

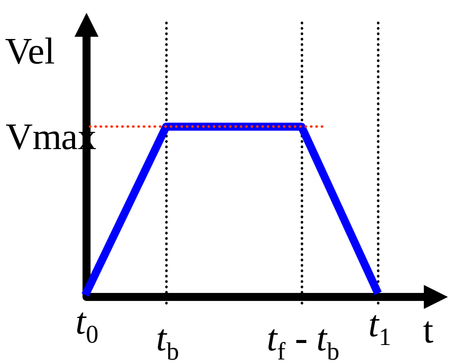
$$\boxed{\alpha_0 = \frac{q_i + q_f - V_{\max} \cdot t_f}{2}}$$

En la unión…

$$q_i + \frac{V_{\max}}{2} \cdot t_b = \frac{q_i + q_f - V_{\max} \cdot t_f}{2} + V_{\max} \cdot t_b$$

$$t_b = \frac{q_i - q_f + V_{\max} \cdot t_f}{V_{\max}} \Rightarrow 0 \le t_b \le \frac{t_f}{2}$$

$$\boxed{\frac{q_f - q_i}{t_f} < V_{\max} \le \frac{2(q_f - q_i)}{t_f}}$$

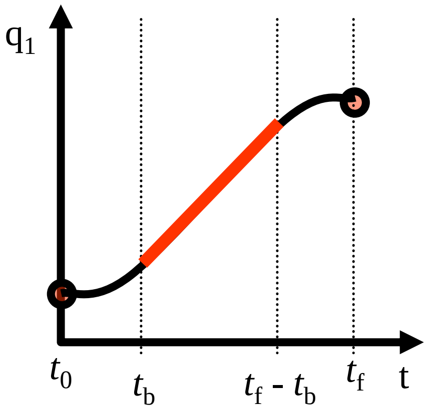


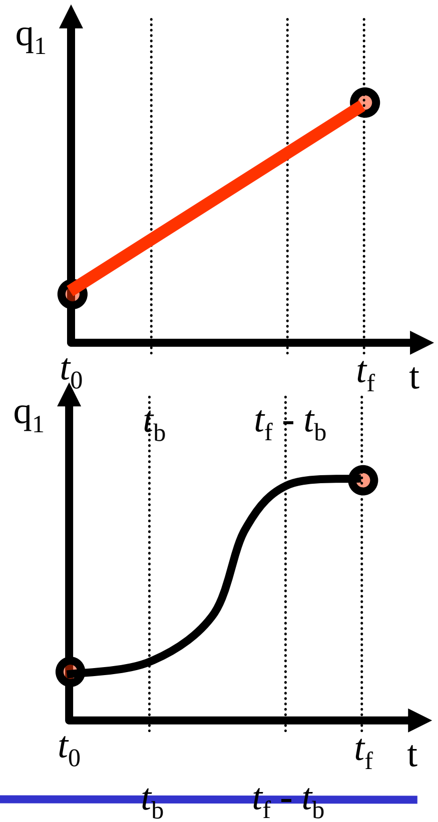
Planificación de trayectorias…

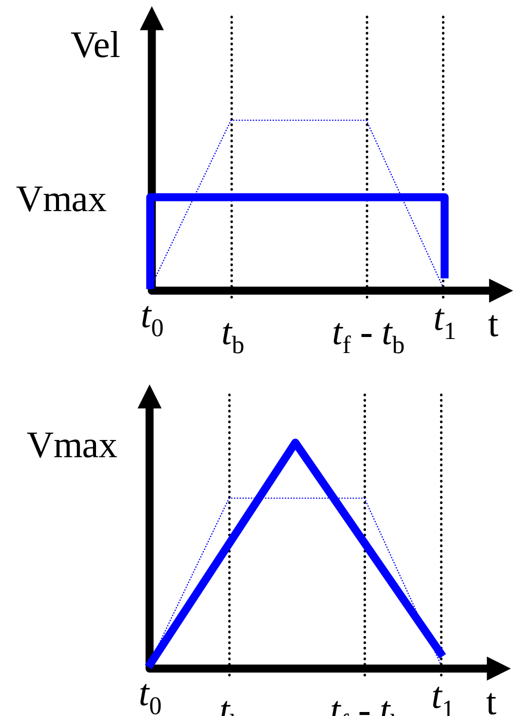
Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS LSPB…
(linear segments with parabolic blends)

$$\boxed{\frac{q_f - q_i}{t_f} < V_{\max} \leq \frac{2(q_f - q_i)}{t_f}}$$



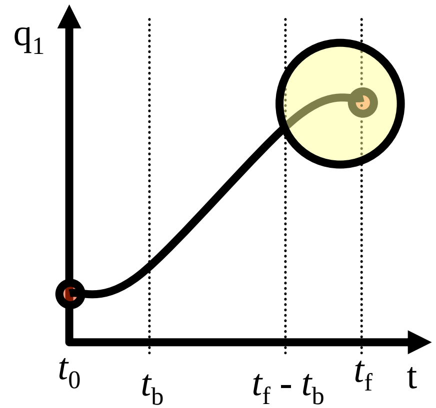


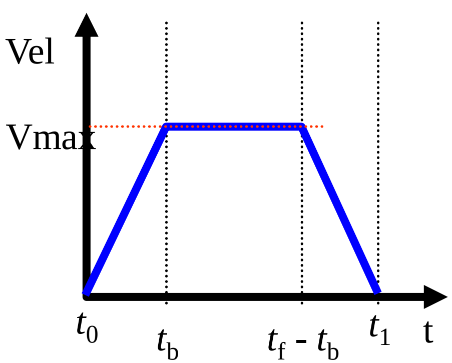


Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS LSPB…
(linear segments with parabolic blends)





$$t_f - t_b \leq t \leq t_f$$

$$\boxed{q_1(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2}$$

$$\dot{q}_1(t) = b_1 + 2b_2 \cdot t$$

$$\ddot{q}_1(t) = 2b_2$$

$$t = t_f$$

$$q_1(t_f) = q_f = b_0 + b_1 \cdot t_f + b_2 \cdot t_f^{\,2}$$

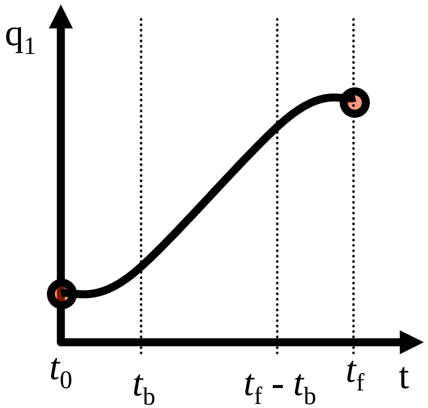
$$\dot{q}_1(t_f) = 0 = b_1 + 2b_2 \cdot t_f$$

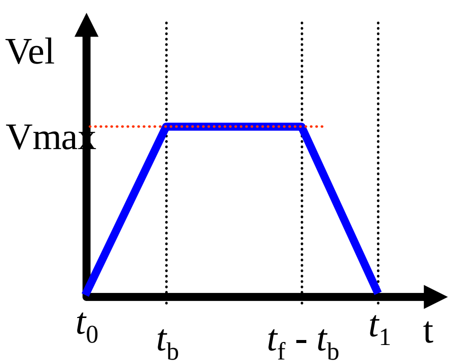
$$\ddot{q}_1(t) = 2b_2 = -2a_2$$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS LSPB…
(linear segments with parabolic blends)





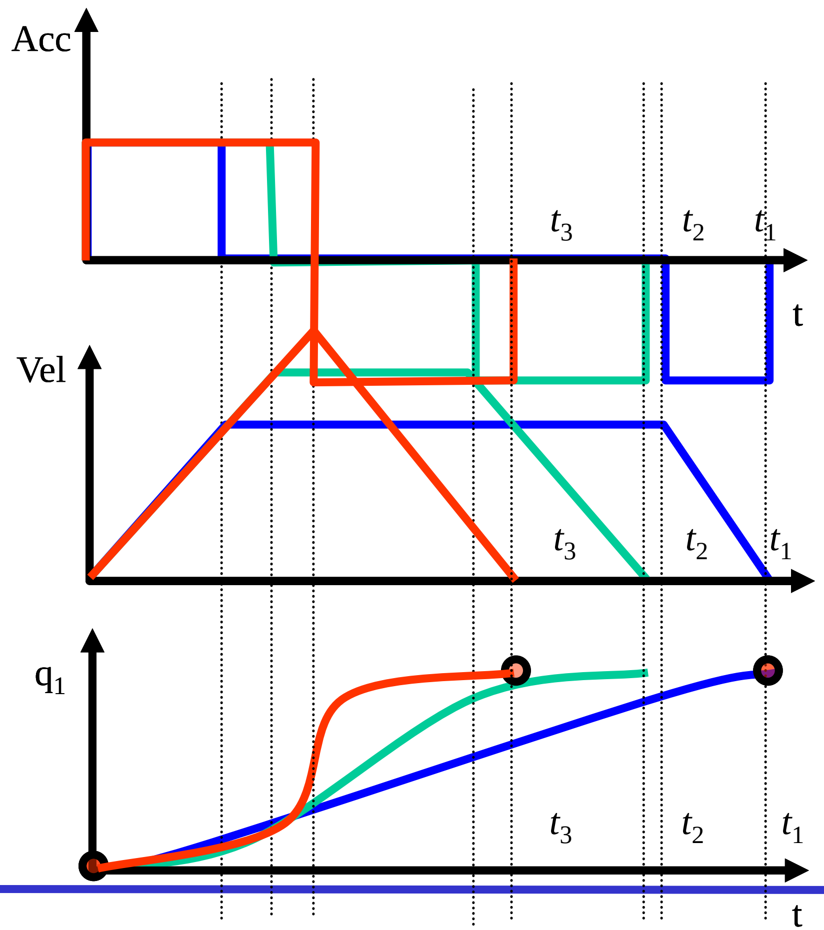
$$q_1(t) = \begin{cases} q_i + \dfrac{V_{\max}}{2 \cdot t_b} \cdot t^2 \Rightarrow 0 \le t \le t_b \\ \dfrac{q_i + q_f - V_{\max} \cdot t_f}{2} + V_{\max} \cdot t \Rightarrow t_b \le t \le t_f - t_b \\ q_f - \dfrac{V_{\max} \cdot t_f{}^2}{2t_b} + \dfrac{V_{\max} \cdot t_f \cdot t}{t_b} - \dfrac{V_{\max} \cdot t^2}{2t_b} \Rightarrow t_f - t_b \le t \le t_f \end{cases}$$

Planificación de trayectorias…

Trayectorias en el Espacio de articulación…

TRAYECTORIAS DE TIEMPO MÍNIMO…

Si consideramos…
vel ini =0, vel fin =0
Pos ini = q_i ,Pos fin = qf
Tiempo Trayectoria = ?

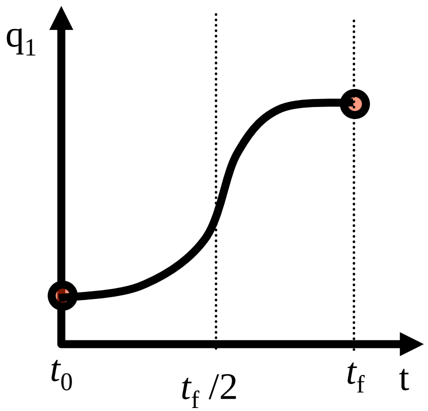


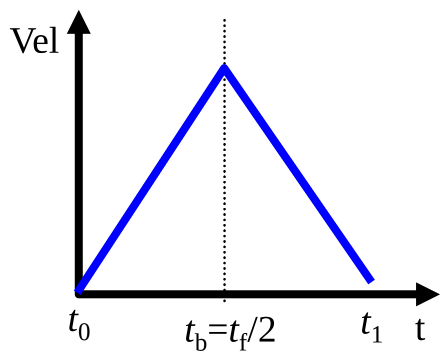
Planificación de trayectorias…

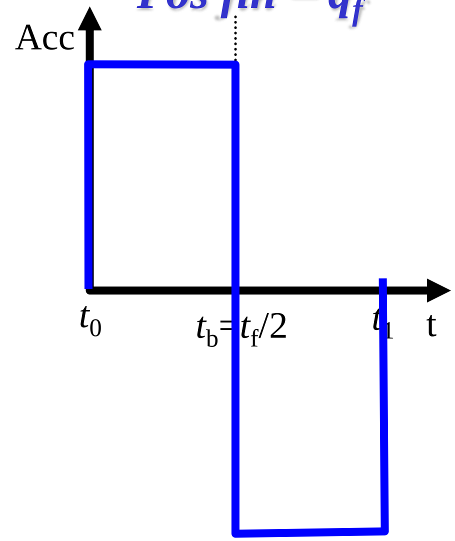
Trayectorias en el Espacio de articulación…

Si consideramos…
vel ini =0
vel fin =0
Pos ini = q_i
Pos fin = q_f

TRAYECTORIAS DE TIEMPO MÍNIMO…







$$t_b = \frac{q_i - q_f + V_{\max} \cdot t_f}{V_{\max}} \Rightarrow 0 \le t_b \le \frac{t_f}{2}$$

$$V_{\max} = \frac{2(q_f - q_i)}{t_f}$$

$$t_b = \frac{t_f}{2} = \frac{q_i - q_f + V_{\max} \cdot t_f}{V_{\max}}$$

$$t_f = 2 \cdot \sqrt{(q_f - q_i)/acc}$$